

Директна и обрнута пропорционалност

Увод:

Количник реалних бројева **a** и **b**, тј. број

$$a : b = \frac{a}{b}$$

назива се размером бројева **a** и **b**

Пропорција је једнакост две размере:

$$a : b = c : d$$

и решава се тако што се помноже "спољашњи са спољашњим" и "унутрашњи са унутрашњим" чланом пропорције

$$\begin{aligned} a \cdot d &= b \cdot c \\ a \cdot d &= b \cdot c \end{aligned}$$

1) **Колико кошта 7 kg кромпира ако је за 5 kg кромпира плаћено 120 динара?**

Како најпре да запишемо податке?

$$\begin{array}{ll} 5 \text{ kg} & \dots\dots\dots 120 \text{ kg} \\ 7 \text{ kg} & \dots\dots\dots X \text{ kg} \end{array}$$

Онда увек напишемо стрелицу од X ка познатој.

$$5 \text{ kg} \dots\dots \uparrow 120 \text{ din.}$$

$$7 \text{ kg} \dots\dots \uparrow X \text{ din.}$$

ове две стрелице посматрамо као једну

Даље размишљамо: Да је X већи или мањи број од 120?

Ако 5 kg кошта 120 дин., онда ће 7 kg коштати више динара. Дакле X је већи број од 120. То значи да стрелица иде од ВЕЋЕГ КА МАЊЕМ броју, па тако упишемо стрелицу и код 5 kg и 7 kg, од ВЕЋЕГ КА МАЊЕМ, од 7 kg ка 5 kg

$$\uparrow 5 \text{ kg} \dots\dots \uparrow 120 \text{ din.}$$

$$\uparrow 7 \text{ kg} \dots\dots \uparrow X \text{ din.}$$

ове две стрелице посматрамо као једну

Даље пратимо смер стрелица и оформимо пропорцију:

$$X:120=7:5$$

$X \cdot 5 = 120 \cdot 7 \Rightarrow$ **Совет: Увек прво изрази непознату, можда ће има нешто да се скрати!!!!**

$$X = \frac{120 \cdot 7}{5}$$

$$X = 168 \text{ din.}$$

Дакле, за 7 kg кромпира треба 168 дин.

2) Ако дневно ради 7 часова, један радник посао заврши за 15 дана. Колико часова дневно би радник требало да ради да би исти посао завршио за 12 дана?

Запишимо најпре податке:

7 час 15 дана

X час 12 дана

Напишимо стрелицу од X ка познатој.

↑ 7cas 15dana

↑ Xcas 12dana

ове две стрелице посматрамо као једну

Да ли је X већи или мањи број од 7?

Ако се смањи број дана морамо наравно радити више часова. Дакле, X је већи од 7 па стрелица иде од већег ка мањем, што значи од 15 ка 12.

↑ 7cas ↓ 15dana

↑ Xcas ↓ 12dana

ове две стрелице посматрамо као једну

Пратимо смер стрелица и правимо пропорцију:

$$X : 7 = 15 : 12$$

$$X \cdot 12 = 7 \cdot 15$$

$$X = \frac{7 \cdot 15}{12}$$

$$X = \frac{7 \cdot 5}{4}$$

$$X = \frac{35}{4} = 8 \frac{3}{4} \text{ Часова}$$

Дакле, 12 дана морамо да радимо по $8 \frac{3}{4}$ часова, односно 8 сати и 45 минута.

3) Од 66 kg предива добија се 165 m тканине. Колико се метара тканине добије од 112 kg предива?

$$\begin{aligned} \uparrow 66kg \dots\dots\dots \uparrow 165m & & X : 165 = 112 : 66 \\ \uparrow 112kg \dots\dots\dots \uparrow Xm & & X \cdot 66 = 112 \cdot 165 \\ & & X = \frac{112 \cdot 165}{66} \\ & & X = 280m \end{aligned}$$

4) Зупчаник има 54 зупца и прави 84 обртаја у минуту. Колико зупца има зупчаник ако прави 126 обртаја и у преносу је са првим.

$$\begin{aligned} \uparrow 54zub \dots\dots\dots \downarrow 84obr. & & X : 54 = 84 : 126 \\ \uparrow Xzub \dots\dots\dots \downarrow 126obr. & & X \cdot 126 = 54 \cdot 84 \\ & & X = \frac{54 \cdot 84}{126} \\ & & X = 36 \text{ Зубаца} \end{aligned}$$

5) Једна просторија осветљена је са 15 сијалица од 60w. Колико би сијалица од 75 w давало сито осветљење?

$$\begin{aligned} \uparrow 15sij \dots\dots\dots \downarrow 60w \\ \uparrow Xsij \dots\dots\dots \downarrow 75w \end{aligned}$$

Пази: Ако узмемо јаче сијалице, мањи број ће давати исто осветљење.

$$\begin{aligned} X : 15 = 60 : 75 \\ X \cdot 75 = 15 \cdot 60 \\ X = \frac{15 \cdot 60}{75} \\ X = 12 \text{ Сијалица} \end{aligned}$$

6) За 14 kg робе плаћено је 980 динара. Колико ће се килограма робе купити за 4340 динара?

$$\begin{aligned} \uparrow 14kg \dots\dots\dots \uparrow 980din. & & X : 14 = 4340 : 980 \\ \uparrow Xkg \dots\dots\dots \uparrow 4340din. & & X \cdot 980 = 14 \cdot 4340 \\ & & X = \frac{14 \cdot 4340}{980} \\ & & X = 62 \text{ kg} \end{aligned}$$

7) За 30 секунди звук пређе пут од 10200 m. Колики пут пређе звук од 1 мин. и 15 секунди?

$$\begin{array}{l} 30\text{сек} \dots\dots\dots 10200\text{m} \\ 1\text{мин.} 15\text{сек} \dots\dots\dots X\text{m} \end{array}$$

Пази: Најпре све претвори у секунде!!!! 1мин и 15 сек =60+15=75сек

$$\begin{array}{l} \uparrow 30\text{сек} \dots\dots\dots \uparrow 10200\text{m} \\ \uparrow 1\text{мин.} 15\text{сек} \dots\dots\dots \uparrow X\text{m} \end{array} \quad \begin{array}{l} X : 10200 = 75 : 30 \\ X \cdot 30 = 75 \cdot 10200 \\ X = \frac{75 \cdot 10200}{30} \\ X = 25500\text{m} \end{array}$$

8) Дванаест зидара сазида једну зграду за 5 дана. За колико дана би исти посао био завршен да је ангажовано 15 зидара?

$$\begin{array}{l} \downarrow 12\text{zid} \dots\dots\dots \uparrow 5\text{dana} \\ \downarrow 15\text{zid} \dots\dots\dots \uparrow X\text{dana} \end{array} \quad \begin{array}{l} X : 5 = 12 : 15 \\ X \cdot 15 = 5 \cdot 12 \\ X = \frac{5 \cdot 12}{15} \\ X = 4\text{dana} \end{array}$$

9) Три цеви напуне базен за 35 часова. За које ће време базен напунити пет цеви?
(Претпоставља се да све цеви једнаком брзином пуне базен).

$$\begin{array}{l} \downarrow 3\text{cevi} \dots\dots\dots \uparrow 35\text{čas} \\ \downarrow 5\text{cevi} \dots\dots\dots \uparrow X\text{čča} \end{array} \quad \begin{array}{l} X : 35 = 3 : 5 \\ 5 \cdot X = 35 \cdot 3 \\ X = \frac{35 \cdot 3}{5} \\ X = 21\text{čas} \end{array}$$

**10) Дванаест радника радећи по 8 часова дневно заради 120.000 динара.
Колико часова треба да ради 10 радника да би зарадили 150.000 динара?**

12rad... ↑ 8čas...120.000din.

10rad... ↑ Xčča...150.000din.

Ово је такозвана продужена пропорција. И овде најпре напишемо стрелицу од X ка 8.
Код продужене пропорције је трик да сваки податак посматрамо посебно:

↓ 12rad... ↑ 8čas

↑ 102000din... ↑ 8čas

↓ 10rad... ↑ Xčča

↑ 150000rad... ↑ Xčča

Закључимо како ту иду стрелице па их пренесемо на продужену пропорцију:

↓ 12rad... ↑ 8čas... ↑ 120000din

↓ 10rad... ↑ Xčča... ↑ 150000din

Даље: Пратимо смер стрелица и правимо пропорцију.

$$X : 8 = 12 : 10 \quad \text{Пази: Пишемо = испод =}$$

$$= 150.000 : 120.000$$

Сада помножимо све " спољашње " и све "унутрашње":

$$X \cdot 10 \cdot 120000 = 8 \cdot 12 \cdot 150000$$

$$X = \frac{8 \cdot 12 \cdot 150000}{10 \cdot 120000} \quad \text{Skrati!}$$

$$X = 12\text{časova}$$

11) Радећи дневно по 8 часова, 21 радник за 6 дана изради 720 металних профила; за колико ће дана 28 радника, радећи по 7 часова израдити 1 260m металних профила?

8čas...21radnik... ↑ 6dana...720 profila

7čas...28radnik... ↑ Xdana...1260 profila

Стрелица од X "нагоре", па посматрамо податак по податак:

| | | |
|------------------|--------------------|------------------------|
| ↓ 8čas.. ↑ 6dana | ↓ 21rad... ↑ 6dana | ↑ 720 prof ... ↑ 6dana |
| ↓ 7čas.. ↑ Xdana | ↓ 28rad... ↑ Xdana | ↑ 1260 prof .. ↑ Xdana |

Сада смер стрелица вратимо у продужену пропорцију:

↓ 8čas.. ↓ 21rad.. ↑ 6dan.. ↑ 720 prof

↓ 7čas.. ↓ 28rad.. ↑ Xdan.. ↑ 1260 prof

Наравно овде "мале" пропорције не морамо издвајати на страну, већ одмах закључити какав је њихов смер.

Пратимо смер стрелица:

$$\begin{aligned} X : 6 &= 8 : 7 \\ &= 21 : 28 \\ &= 1260 : 720 \end{aligned}$$

$$X \cdot 7 \cdot 28 \cdot 720 = 6 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 1260$$

$$X = \frac{6 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 1260}{7 \cdot 28 \cdot 720} \text{skрати}$$

$$X = 9 \text{dana}$$

12) 65 радника ископа неки канал за 23 дана. После 15 дана 13 радника напусти посао. Колико дана треба онима који су остали да заврше остатак посла?

Овде не треба уписивати податак 65 радника ... 23 дана, већ 65 радника... 8 дана. Зашто? У задатку се каже да је после 15 дана отишло 13 радника што значи да је остало $23-15=8$ дана. Наравно за "доњи" део поставке ћемо узети $65-13=52$ радника
Дакле:

$$\begin{aligned} \downarrow 65 \text{rad} \dots \uparrow 8 \text{dana} & \quad X : 8 = 65 : 52 \\ \downarrow 52 \text{rad} \dots \uparrow X \text{dana} & \quad X \cdot 52 = 8 \cdot 65 \\ & \quad X = \frac{8 \cdot 65}{52} \\ & \quad X = 10 \text{dana} \end{aligned}$$

13) Неки посао 6 радника може да заврши за 5 дана. За колико ће дана бити исти посао завршен ако после 2 дана дође још 3 радника?

И овде не уписујемо 6 рад...5 дана, већ 6 рад...3 дана ($5-2=3$ дана) за колико би они "нормално" завршили посао. У доњем делу поставке задатака је 9 рад ...Хдана ($6+3=9$ рад)

$$\begin{aligned} \downarrow 6 \text{rad} \dots \uparrow 3 \text{dana} & \quad X : 3 = 6 : 9 \\ \downarrow 9 \text{rad} \dots \uparrow X \text{dana} & \quad X \cdot 9 = 3 \cdot 6 \\ & \quad X = 2 \text{dana} \end{aligned}$$

За оне који не воле да "мозгују" да ли су величине директно или обрнуто пропорционалне напомнимо да су најчешћи случајеви ОБРНУТЕ ПРОПОРЦИОНАЛНОСТИ следећи:

- Број радника – утрошак времена
- Брзина кретања – време путовања
- Зупчаници – број обртаја