POLINOMI SA JEDNOM PROMENLJIVOM

Oblika su:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + ... + a_1 x + a_0$$

Ovaj oblik se dobija "sredjivanjem" polinoma (sabiranjem, oduzimanje...) i naziva se kanonički, x-je promenljiva $a_n, a_{n+1}, ..., a_0$ su koificijenti (konstante), n je prirodan broj ili nula.

Ako je $a_n \neq 0$, onda kažemo da je polinom P stepena n, pa je a_n ''najstariji'' koeficijenat.

Primer: $P(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 7$

-ovaj polinom je stepena 3 a najstariji koeficijenat je 4.

-zanimljivo je da se član bez x-sa, takozvani slobodni član dobija kad umesto x stavimo 0, tj. $P(0) = 7$, ili za polinom $P(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + ... + a_1 x + a_0$, $P(0) = a_0$

-takodje ako umesto x stavimo 1 je $P(1) = a_n + a_{n-1} + ... + a_0$ tj. za naš primer $P(1) = 4 + 6 - 2 + 7$

SABIRANJE I ODUZIMANJE POLINOMA:

Primer: $P(x)=3x^3-4x^2+6x-7$

$Q(x)=4x^3-2x^2+12x+3$

$P(x)+Q(x)=(3x^3-4x^2+6x-7)+(4x^3-2x^2+12x+3)$

$=\underline{3x^3}-\underline{\underline{4x^2}}+\underline{\underline{\underline{6x}}}-7+\underline{4x^3}-\underline{\underline{2x^2}}+\underline{\underline{\underline{12x}}}+3$

$=$ krenemo sa sabiranjem sa najvecim stepenom pa dok ne dodjemo do ‘’slobodnih članova’’

$=7x^3-6x^2+18x-4$

$P(x)-Q(x)=(3x^3-4x^2+6x-7)-(4x^3-2x^2+12x+3)$

$=$ **pazi: Minus ispred zagrade menja znak <u>svim</u> članovima u zagradi**

$=\underline{3x^3}-\underline{\underline{4x^2}}+\underline{\underline{\underline{6x}}}-7-\underline{4x^3}+\underline{\underline{2x^2}}-\underline{\underline{\underline{12x}}}-3$

$=-x^3-2x^2-6x-10$

Najbolje je da podvlačite slične monome kako se nebi desila greska u sabiranju (oduzimanju)

MNOŽENJE POLINOMA

Primer: $P(x)=2x-3$

$Q(x)=x^2+4x-7$

$$P(x)\cdot Q(x)=(2x-3)\cdot(x^2+4x-7)$$

Kako množiti:
Množi se ''svako sa svakim''. Najbolje je da prvo odredimo znak $(+\cdot+=+,\ -\cdot-=+,\ +\cdot-=-,\ -\cdot+=-)$, onda pomnožimo brojke i na kraju nepoznate.
Naravno da je $x\cdot x=x^2$, $x^2\cdot x=x^3$, $x^2\cdot x^2=x^4$, itd. (ovde koristimo pravila iz stepenovanja: $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$
Vratimo se na zadatak:

$$(2x-3)\cdot(x^2+4x-7)=$$

$$2x^3+8x^2-14x-3x^2-12x+21=$$
$$=2x^3+5x^2-26x+21$$

Primer 2:

$A(x)=-x^2+4x-7$

$B(x)=2x^2+5x+1$

$$A(x)\cdot B(x)=(-x^2+4x-7)\cdot(2x^2+5x+1)$$
$$=2x^4-5x^3-x^2+8x^3+20x^2+4x^2-35x-7$$
$$=2x^4+3x^3+5x^2-31x-7$$

DELJENJE POLINOMA

Podsetimo se najpre deljenja brojeva.

Primer: $57146 : 23 = 2484$

$$
\begin{array}{l}
57146 : 23 = 2484 \\
-46 \\
\hline
\;111 \\
-92 \\
\hline
\;\;194 \\
-184 \\
\hline
\;\;\;106 \\
\;\;-92 \\
\hline
\;\;\;\;\;4 \text{ - ostatak}
\end{array}
$$

Možemo zapisati: $\dfrac{57146}{23} = 2848 + \dfrac{4}{23}$

$$\frac{deljenik}{delilac} = rešenje + \frac{ostatak}{delilac}$$

Probajmo sad sa polinomima:

Primer 1:

$$
\begin{array}{l}
(2x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = 2x - 1 \\
{}_{(-)}2x^2 -_{(+)} 4x \\
\hline
\quad -x + 6 \\
\quad -_{+}x +_{-} 2 \\
\hline
\qquad\quad 4 \rightarrow \text{Ostatak}
\end{array}
$$

Dakle:

$$\frac{2x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 2x - 1 + \frac{4}{x - 2}$$

POSTUPAK

→ Podelimo ‘’prvi sa prvim’’ $\dfrac{2x^2}{x} = 2x$
upišemo 2x u rešenju
→ 2x pomnožimo sa deliocem i potpišemo ispod $2x^2$-5x
→ promenimo znake (ono u zagradi)
→ prvi se uvek skrate a druge saberemo
-5x+4x=-x
→ dopišemo +6
→ opet delimo ‘’prvi sa prvim’’ $\dfrac{-x}{x} = -1$
→ množimo sa deliocem
→ promenimo znake i saberemo

Primer 2:

$$(x^3+2x^2-4x+5):(x+1)=x^2+x-5$$

$$\begin{array}{l}
\underset{(-)}{}x^3 \underset{(-)}{+} x^2 \\
\hline
\quad x^2-4x \\
\quad \underset{(-)}{}x^2 \underset{(-)}{+} x \\
\hline
\qquad -5x+5 \\
\qquad \underset{(+)}{-}5x \underset{(+)}{-} 5 \\
\hline
\qquad\quad 10
\end{array}$$

POSTUPAK

→ Podelimo ''prvi sa prvim'' $\frac{x^3}{x}=x^2$ upišemo x^2 u rešenje
→ x^2 pomnožimo sa deliocem i potpišemo ispod x^3+2x^2
→ promenimo znake kod x^3+2x^2
→ prvi se uvek ''skrate'', $2x^2-x^2=x^2$
→ spustimo 4x
→ opet ''prvi u prvom'' $\frac{x^2}{x}=x$
→ x množimo sa deliocem
→ menjamo znake kod x^2+x
→ prvo se skrate a -4x-4=-5x
→ spuštamo +5
→ $\frac{-5x}{x}=-5$
→ -5·(x+1)=-5x-5
→ promenimo znake i prvi se skrate
→ 5+5=10

Dakle:

$$\frac{x^3+2x^2-4x+5}{x+1}=x^2+x-5+\frac{10}{x+1}$$

Primer 3:

$$(x^4-3x^3+2x^2+x-5):(x^2+2x-3)=x^2-5x+15$$

$$\begin{array}{l}
\underset{-}{}x^4 \underset{(-)}{+} 2x^3 \underset{(+)}{-} 3x^2 \\
\hline
\quad -5x^3+5x^2+x \\
\quad \underset{(+)}{-}5x^3 \underset{(-)}{+} 10x^2 \underset{(-)}{+} 15x \\
\hline
\qquad 15x^2-14x-5 \\
\qquad \underset{(-)}{}15x^2 \underset{(-)}{+} 30x \underset{(+)}{-} 45 \\
\hline
\qquad\quad -44x+40 \rightarrow \text{ ostatak}
\end{array}$$

Primer 4:

$$(x^4-1):(x-1)=x^3+x^2+x+1$$

$$\underset{(-)}{} x^4 \underset{(+)}{-} x^3$$

$$+x^3-1$$

$$\underset{(-)}{+}x^3 \underset{(+)}{-} x^2$$

$$x^2-1$$

$$\underset{(-)}{}x^2 \underset{(+)}{-} x$$

$$x-1$$

$$\underset{(-)}{}x \underset{(+)}{-} 1$$

Nema ostatka

PAZI:

Kad skratimo ''prve'' a drugi nisu istog stepena prepišemo ih, prvo onaj sa većim pa sa manjim stepenom, to jest: $-x^3-1$

Dakle: $\frac{x^4-1}{x-1}=x^3+x^2+x+1$

U nekim zadacima interesovaće nas samo ostatak koji se dobija deljenjem dvaju polinoma a ne i količnik. Tu nam pomaže **Bezuova teorema:**
Ostatak pri deljenju polinoma P(x) sa (x-a) jednak je P(a), to jest vrednosti polinoma P(x) u tački x=a. Ako je P(a)=0, deljenje je bez ostatka.

Primer1: Nadji ostatak pri deljenju polinoma

x^3-5x^2+6x-7 sa $x-2$ rešimo x-2=0
x=2

onda uporedjujemo x-a i x-2→a=2

Sada je
$$P(x)=x^3-5x^2+6x-7$$
$$P(2)=2^3-5\cdot 2^2+6\cdot 2-7$$
$$P(2)=8-20+12-7$$
$$P(2)=-7 \Rightarrow \text{Ostatak je -7}$$

Primer2: Nadji ostatak pri deljenju polinoma $2x^3-5x+6$ sa $x+1$
Pazi ovde je a=-1, jer je x+1=0
x=-1

$$P(x)=2x^2-5x+6$$
$$P(-1)=2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)+6$$
$$P(-1)=2+5+6$$
$$P(-1)=13\Rightarrow \text{ Ostatak je 13}$$

Još jedna izuzetna primena Bezueve teoreme je kad rastavljanja polinoma na činioce. Mi smo do sada naučili da faktorišemo polinome drugog stepena. Za polinome trećeg i četvrtog stepena postoje algoritmi, ali su suviše teški. Dok za polinome petog i većeg stepena ne postoji univerzalan način da se faktorišu, odnosno reše.
Kako nam to pomaže Bezuova teorema?

Primer1: Dat je polinom $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$
Izvrši njegovu faktorizaciju.

$$P(x)=x^3-6x^2+11x-6$$

za x=1

$$P(x)=1^3-6\cdot1^2+11\cdot1-6$$
$$P(1)=1-6+11-6$$
$$P(1)=0$$

POSTUPAK

→ uočimo ''slobodan'' član, to jest onaj bez x-sa. ovde je to 6.
→ on se može podeliti: +1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6
→redom zamenjujemo ove brojeve dok ne dobijemo da je $P(a)=0$
→ našli smo da je a=1
→ podelimo polinom sa $(x-a)=(x-1)$

$$(x^3-6x^2+11x-6):(x-1)=x^2-5x+6$$
$$\underset{(-)}{x^3}\ \underset{(+)}{-x^2}$$
$$-5x^2+11x$$
$$\underset{(+)}{-5x^2}\ \underset{(-)}{+5x}$$
$$6x-6$$
$$\underset{(-)}{6x}\ \underset{(+)}{-6}$$

Nema ostatka

Ovim smo smanjili stepen polinoma i sad već x^2-5x+6 znamo da rastavljamo

$$\begin{aligned} x^2-5x+6 &= x^2-2x-3x+6 \\ &= x(x-2)-3(x-2) \\ &= (x-2)(x-3) \end{aligned}$$

<u>Dakle:</u> $x^3 - 6x^2 + 11x - 66 = (x-1)(x-2)(x-3)$

<u>Primer 2:</u>

Izvršiti faktorizaciju polinoma:
$P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + ax + 4$
Dakle posmatrajmo broj 4 (slobodan član). Pošto njega možemo podeliti sa +1, -1, +2, -2,+4, -4, redom menjamo u polinom dok ne bude P(a)=0

Za x=1 $P(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 4 = 1 - 2 - 3 + 4 + 4$
$P(1) = 4 \neq 0$ Idemo dalje

Za x=1 $P(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 4$
$P(-1) = 1 + 2 - 3 - 4 + 4 = 0$

Dakle, delmimo sa $x - (-1) = x + 1$

$$(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4) : (x+1) = x^3 - 3x^2 + 4$$
$$\underset{(-)}{x^4} \underset{(-)}{+ x^3}$$
$$-3x^3 - 3x^2$$
$$\underset{(+)}{-3x^3} \underset{(+)}{-3x^2}$$
$$4x + 4$$
$$\underset{(-)}{4x} \underset{(-)}{+ 4}$$

Dalje gledamo $P_1(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Za x=-1 $P_1(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0$
Opet delimo sa (x+1)

$$(x^3 - 3x^2 + 4) : (x+1) = x^2 - 4x + 4$$
$$\underset{(-)}{x^3} \underset{(-)}{+ x^2}$$
$$-4x^2 + 4$$
$$\underset{(+)}{-4x} \underset{(+)}{-4x}$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

Dakle: $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = (x+1)(x+1)(x^2 - 4x + 4)$
$= (x+1)^2 (x-2)^2$