

# PLANIMETRIJA

## Mnogouglovi

Za pravilne mnogouglove sa n stranica važi:

- On ima n osa simetrije
- Ako je broj stranica paran on je ujedno centralno simetričan
- Oko svakog pravilnog mnogougla se može opisati kružnica čiji se centri poklapaju
- Može se podeliti na n karakterističnih jednakokrakih trouglova čija su dva temena bilo koja dva susedna temena mnogougla a treće je u centru opisane tj upisane kružnice.
- Zbir svih unutrašnjih uglova sa računa po formuli  $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$
- Jedan unutrašnji ugao je onda  $\alpha = \frac{S_n}{n}$
- Jedan spoljašnji ugao je  $\alpha_1 = \frac{360^\circ}{n}$  ( $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$ )
- Zbir svih spoljašnjih uglova je  $360^\circ$
- Iz svakog temena mnogougla mogu se povući  $d_n = n - 3$  dijagonala
- Ukupan broj dijagonala je  $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$
- Ako je dužina stranice a onda je obim mnogougla  $O = na$
- Površina se računa po formuli  $P = n \frac{ah}{2}$ , gde je h visina karakterističnog trougla
- Centralni ugao je  $\varphi = \frac{1}{n} 360^\circ$

### 1) Koji pravilan mnogougao ima tri puta veći ugao od spoljašnjeg?

Ako sa  $\alpha$  - obeležimo unutrašnji ugao, a sa  $\alpha_1$  - spoljašnji ugao traženog mnogougla onda je:  $\alpha = 3\alpha_1$  i važi  $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$

Dakle imamo sistem:

$$\alpha = 3\alpha_1$$

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$$

---

$$4\alpha_1 = 180^\circ \Rightarrow \alpha_1 = \frac{180^\circ}{4} \Rightarrow \alpha_1 = 45^\circ$$

Kako je  $n = \frac{360^\circ}{\alpha_1}$  to je:  $n = \frac{360^\circ}{45^\circ}$ ,  $n = 8$  Radi se o osmouglu!!!

### 2) Izračunati unutrašnji ugao pravilnog mnogougla, ako je razlika broja dijagonala i stranica 25.

Pošto broj dijagonala obeležavamo sa  $D_n \Rightarrow D_n - n = 25$

$$\frac{n(n-3)}{2} - n = 25 \rightarrow \text{sve pomnožimo sa 2}$$

$$n(n-3) - 2n = 50$$

$$n^2 - 3n - 2n = 50$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0 \rightarrow \text{Dobili smo kvadratnu jednačinu po } n$$

$$n_1 = 10$$

$$n_2 = -5 \rightarrow \text{Nemoguće}$$

Znači,  $n = 10$ , pa se radi o 10-touglu. Spoljašnji ugao je  $\alpha_1 = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

Sada ćemo naći unutrašnji ugao:

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - \alpha_1$$

$$\alpha = 180^\circ - 36^\circ$$

$$\alpha = 144^\circ$$

### 3) Ako se broj stranica pravilnog mnogougla poveća za 2, tada se centralni ugao smanji za $6^\circ$ . Odrediti broj dijagonala mnogougla.

Neka je  $n$ -broj stranica tog mnogougla i  $\varphi$ -centralni mnogougao.  $\left(\varphi = \frac{360^\circ}{n}\right)$

→ Ako se broj stranica poveća za 2 tada je centralni ugao  $\varphi_1 = \frac{360^\circ}{n+2}$

$$\varphi - \varphi_1 = 6$$

$$\frac{360^\circ}{n} - \frac{360^\circ}{n+2} = 6 \rightarrow \text{Sve pomnožimo sa } n(n+2)$$

$$360^\circ(n+2) - 360^\circ n = 6n(n+2) \rightarrow \text{Sredimo i dobijamo kvadratnu:}$$

$$n^2 + 2n - 120 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-2 \pm 22}{2}$$

$$n_1 = 10$$

$$n_2 = -12 \rightarrow \text{Nemoguće}$$

Dakle, broj stranica je  $n=10$

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$D_{10} = \frac{10(10-3)}{2} = \frac{10 \cdot 7}{2} = 35$$

**4) Za koliko se povećava zbir unutrašnjih uglova mnogougla, ako se broj stranica poveća za 5?**

Zbir unutrašnjih uglova se nalazi po formuli  $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$

$$\begin{aligned} S_{n+5} - S_n &= (n+5-2) \cdot 180^\circ - (n-2) \cdot 180^\circ \\ &= (n+3) \cdot 180^\circ - (n-2) \cdot 180^\circ \\ &= n \cdot 180^\circ + 3 \cdot 180^\circ - n \cdot 180^\circ + 2 \cdot 180^\circ \\ &= 540^\circ + 360^\circ \\ &= 900^\circ \end{aligned}$$

dakle, zbir unutrašnjih uglova se poveća za  $900^\circ$

**5) Ako se broj stranica mnogougla poveća za 11, onda se broj njegovih dijagonala poveća za 1991. Odrediti zbir unutrašnjih uglova tog mnogougla.**

$n \rightarrow$  Broj stranica

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2} \rightarrow \text{Broj dijagonala}$$

$$n+11 \rightarrow \text{Novi broj stranica}$$

$$D_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1-3)}{2} = \frac{(n+1)(n+8)}{2} \rightarrow \text{Novi broj dijagonala}$$

$$D_{n+1} - D_n = 1991$$

$$\frac{(n+1)(n+8)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 1991 \rightarrow \text{Sve pomnožimo sa 2}$$

$$n^2 + 8n + 11n + 88 - n^2 + 3n = 3982$$

$$22n = 3982 - 88$$

$$22n = 3894$$

$$n = 177$$

$$S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$$

$$S_{177} = (177-2) \cdot 180^\circ$$

$$S_{177} = 31500^\circ$$

**6) Ako se broj stranica pravilnog mnogougla poveća za dva njegov se ugao poveća za  $9^\circ$ . Odrediti broj stranica mnogougla .**

Neka je n-broj stranica i  $\alpha$  unutrašnji ugao tog mnogougla.  $\alpha = \frac{S_n}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$

Ako se broj stranica poveća za 2, biće ih n+2 i  $\alpha = \frac{S_{n+2}}{n+2} = \frac{(n-2+2) \cdot 180^\circ}{n+2} = \frac{n \cdot 180^\circ}{n+2}$

**Tada je:**

$$\frac{180^\circ n}{n+2} - \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 9 \rightarrow \text{Pomnožimo sve sa } n(n-2)$$

$$180^\circ n^2 - (n-2)(n+2) \cdot 180^\circ = 9n(n+2)$$

$$180^\circ n^2 - n^2 180^\circ + 4 \cdot 180^\circ = 9n(n+2)$$

$$9n(n+2) = 720 \rightarrow \text{Podelimo sa 9}$$

$$n(n+2) = 80$$

$$n^2 + 2n - 80 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-2 \pm 18}{2}$$

$$n_1 = 8$$

$$n_2 = -10 \rightarrow \text{Nemoguće}$$

Dakle n=8 , mnogougao ima ima 8 stranica.

7) Broj dijagonala konveksnog mnogougla u ravni jednak je petostrukom broju njegovih stranica. Izračunati broj stranica mnogougla.

**Rešenje:**

Kako je  $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$  to će biti:

$$D_n = 5n$$

$$\frac{n(n-3)}{2} = 5n \rightarrow \text{pomnožimo sa 2}$$

$$n(n-3) = 10n$$

$$n^2 - 3n - 10n = 0$$

$$n^2 - 13n = 0$$

$$n(n-13) = 0$$

$$n = 0 \quad \vee \quad n = 13$$

*nemoguće*

Dakle  $n = 13$

8) Koji pravilan mnogougao ima 44 dijagonale?

**Rešenje:**  $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$

$$\frac{n(n-3)}{2} = 44$$

$$n(n-3) = 88$$

$$n^2 + 2n - 88 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm 19}{2}$$

$$n_1 = 11$$

$$n_2 = -8 \rightarrow \text{Nemoguće}$$

Dakle  $n=11$

9) Oko kruga poluprečnika  $r = \sqrt{1+\sqrt{2}}$  opisan je pravilan osmougao. Nadji površinu tog osmougla.

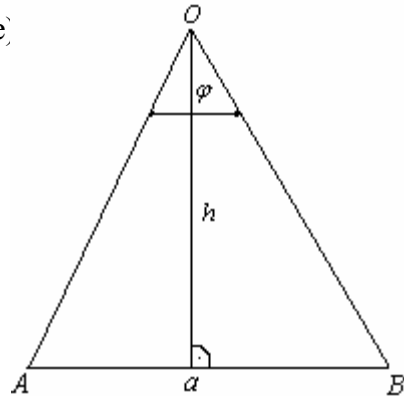
**Rešenje:**

Pravilan osmougao se sastoji iz 8 podudarnih jednakih trouglova. Izvučemo jedan taj karakteristični trougao.

$h = r$  (visina je ista kao i poluprečnik upisane kružnice)

Njegov centralni ugao je  $\varphi = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \Rightarrow$

Pošto nama treba pola ovog ugla, imamo:  $\frac{\varphi}{2} = 22^\circ 30'$



Iz ovog trougla je:

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{a}{r} \quad \text{pa je odatle}$$

$$a = 2r \operatorname{tg} 22^\circ 30'$$

$$P = 8 \cdot \frac{a \cdot h}{2} = 4ah = 4 \cdot 2r \cdot r \cdot \operatorname{tg} 22^\circ 30'$$

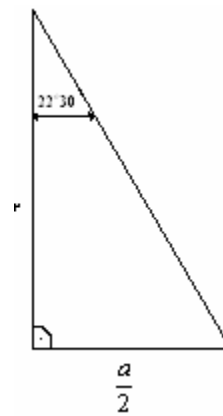
$$P = 8r^2 \operatorname{tg} 22^\circ 30'$$

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} \quad \text{Racionališemo...}$$

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{4 - 2}}$$

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{2}$$



Tako da je sad:

$$P = 8r^2 \operatorname{tg} 22^\circ 30'$$

$$P = 8 \cdot \left( \sqrt{1 + \sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{2}$$

$$P = 8 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{2}$$

$$P = 4\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})$$

$$P = 4\sqrt{2}(2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2)$$

$$P = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$P = 4 \cdot 2$$

$$P = 8$$

← "skratimo" 8 i 2 sa 2