

Operacije sa racionalnim algebarskim izrazima

Najveći zajednički delilac i najmanji zajednički sadržalac polinoma

NZD polinoma P i Q je polinom D koji ima najveći stepen među polinomima koji su delioci i polinoma P i polinoma Q.

NZS polinoma P i Q je polinom S koji ima najmanji stepen među polinomima koji su deljivi i polinomom P i polinomom Q.

Primer 1: Nadji NZS i NZD za polinome:

$$P(x) = x^2 - 4$$

$$Q(x) = x^2 - x - 2$$

$$R(x) = x^2 - 3x + 2$$

Prvo moramo svaki od njih rastaviti na činioce (naravno, upotrebom postupka navedenog u poglavlju: Transformacije algebarskih izraza).

$$P(x) = x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$$

$$Q(x) = x^2 - x - 2 = x^2 - 2x + x - 2 = x(x-2) + 1(x-2) = (x-2)(x+1)$$

$$R(x) = x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x-2)$$

NZD je ustvari 'PRESEK', odnosno 'onaj' koji ga ima u svakom od polinoma.

Ovde je to očigledno x-2. Dakle:

$$\text{NZD} = x-2$$

NZS je 'uniija'. On mora biti deljiv sa sva tri polinoma. Dakle:

$$\text{NZS} = (x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$$

Primer 2: Nadji NZS I NZD za polinome :

$$P = a^2 - ab$$

$$Q = a^2 - b^2$$

$$R = a^2 - 2ab + b^2$$

$$P = a^2 - ab = a(a-b)$$

$$Q = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$R = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$\text{NZD} = (a-b) \rightarrow \text{jer ga ima u sva tri} \quad \text{NZS} = a(a-b)^2(a+b) \rightarrow \text{deljiv sa sva tri}$$

Primer 3: Nadji NZS I NZD za polinome:

$$A = x^2 - xy$$

$$B = xy + y^2$$

$$\begin{aligned} A &= x(x - y) \\ B &= y(x + y) \end{aligned} \Rightarrow \text{NZS} = xy(x - y)(x + y)$$

Šta ćemo sa NZD? Nema činioca koji se sadrži u A i B. U takvoj situaciji NZD = 1, a za polinome kažemo da su uzajamno prosti.

Primer 4: Nadji NZS I NZD za polinome:

$$9a + 15 =$$

$$36a^2 - 100 =$$

$$-9a^2 + 30a - 25 =$$

$$9a + 15 = 3(3a + 5)$$

$$36a^2 - 100 = 4(9a^2 - 25) = 4(3a - 5)(3a + 5)$$

$$-9a^2 + 30a - 25 = -(9a^2 - 30a + 25) = -(3a - 5)^2$$

$$\text{NZS} = -12(3a + 5)(3a - 5)^2$$

Primer 5: Nadji NZS I NZD za polinome:

$$4a^2 + 4ab + b^2 = (2a + b)^2$$

$$4a^2 - b^2 = (2a - b)(2a + b)$$

$$8a^3 + b^3 = (2a)^3 + b^3 = (2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$$

$$\text{NZS} = (2a + b)^2(2a - b)(4a^2 - 2ab + b^2)$$

Primer 6: Nadji NZS I NZD za polinome:

$$3x^3 - 12x^2 + 12x =$$

$$5x^4 + 20x^3 + 20x^2 =$$

$$3nx^2 - 12n = 3n(x^2 - 4) =$$

$$3x^3 - 12x^2 + 12x = 3x(x^2 - 4x + 4) = 3x(x-2)^2$$

$$5x^4 + 20x^3 + 20x^2 = 5x^2(x^2 + 4x + 4) = 5x^2(x+2)^2$$

$$3nx^2 - 12n = 3n(x^2 - 4) = 3n(x-2)(x+2)$$

$$\text{NZS} = 15nx^2(x-2)^2(x+2)^2$$

Primer 7: Nadji NZS I NZD za polinome:

$$2a^4 - 2 = 2(a^4 - 1) = 2(a^2 - 1)(a^2 + 1) = 2(a-1)(a+1)(a^2 + 1)$$

$$a^3 + a^2 + a + 1 = a^2(a+1) + 1(a+1) = (a+1)(a^2 + 1)$$

$$a^3 - a^2 + a + 1 = a^2(a-1) + 1(a-1) = (a-1)(a^2 + 1)$$

$$\text{NZS} = 2(a-1)(a+1)(a^2 + 1)$$

Kako upotrebiti NZS?

1) Uprosti izraz:

$$\frac{a}{ab-b^2} + \frac{b}{a^2-ab} - \frac{a+b}{ab} = \text{najpre treba svaki imenilac rastaviti na činioce=}$$

$$\frac{a}{b(a-b)} + \frac{b}{a(a-b)} - \frac{a+b}{ab} = \text{zatim nadjemo NZS za imenioce ,to je } ab(a-b) \text{ i izvršimo}$$

proširenje razlomka. Kako da znamo koji sa kojim da proširimo? Gledamo imenilac i NZS, šta je "višak", sa tim proširimo. Tako prvi sabirak širimo sa a , jer je "višak" kad gledamo $ab(a-b)$ i $b(a-b)$ drugi sa b a treći sa $(a-b)$. Dakle:

$$\begin{aligned} &= \frac{a \cdot a + b \cdot b - (a+b)(a-b)}{ab(a-b)} = \\ &= \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)}{ab(a-b)} = \frac{a^2 + b^2 - a^2 + b^2}{ab(a-b)} = \frac{2b^2}{ab(a-b)} = \frac{2b}{a(a-b)} \end{aligned}$$

Pre početka (ili po završetku) rada treba postaviti **uslove** zadatka. Pošto deljenje nulom nije dozvoljeno to nijedan u imeniocu **ne** sme biti nula, tj.

$$a \neq 0; b \neq 0; a - b \neq 0 \Rightarrow a \neq b$$

2) Uprosti izraz: $\frac{1}{x^2-x} + \frac{2}{1-x^2} + \frac{1}{x^2+x}$

$$\frac{1}{x^2-x} + \frac{2}{1-x^2} + \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{2}{(1-x)(1+x)} + \frac{1}{x(x+1)} = \text{šta je problem?}$$

Izrazi $(1+x)$ i $(x+1)$ nisu, jer važni komutativni zakon ($A+B=B+A$), ali izrazi $(x-1)$ i $(1-x)$ jesu. Taj problem ćemo rešiti tako što jedan od ta dva izraza "okrenemo" i izvučemo minus ispred, jer važi da je $A-B=-(B-A)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x(x-1)} - \frac{2}{(x-1)(1+x)} + \frac{1}{x(x+1)} = \\
&= \frac{1 \cdot (x+1) - 2x + 1(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{x+1-2x+x-1}{x(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{0}{x(x-1)(x+1)} = 0
\end{aligned}$$

Naravno, uslovi zadatka su:

$$x \neq 0; x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1; x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

3) Uprosti izraz:

$$\frac{a+1}{a+2} + \frac{6a}{a^2-4} - \frac{2a-1}{a-2}$$

$$\frac{a+1}{a+2} + \frac{6a}{a^2-4} - \frac{2a-1}{a-2} =$$

$$\frac{a+1}{a+2} + \frac{6a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2a-1}{a-2} =$$

$$\frac{(a+1)(a-2) + 6a - (2a-1)(a+2)}{(a-2)(a+2)} = \textbf{Pazi na znak ispred zagrade!!!}$$

$$\frac{(a^2 - 2a + a - 2) + 6a - (2a^2 + 4a - a - 2)}{(a-2)(a+2)} =$$

$$\frac{a^2 - 2a + a - 2 + 6a - 2a^2 - 4a + a + 2}{(a-2)(a+2)} =$$

Uvek pokušaj da na kraju rastaviš i brojilac, jer možda ima nešto da se "skрати"!!!

$$\frac{-a^2 + 2a}{(a-2)(a+2)} = \frac{-a(a-2)}{(a-2)(a+2)} =$$

$$\frac{-a}{a+2}$$

Uslovi zadatka su:

$$a+2 \neq 0 \Rightarrow a \neq -2$$

$$a-2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$$

$$4) \frac{x}{x-1} - \frac{3x-1}{x-2} + \frac{2x+1}{x^2-3x+2} = ?$$

$$\frac{x}{x-1} - \frac{3x-1}{x-2} + \frac{2x+1}{x^2-3x+2} =$$

Izdvojićemo i rastaviti ‘na stranu’

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2 = x(x-2) - 1(x-2) = (x-2)(x-1)$$

$$\frac{x}{x-1} - \frac{3x-1}{x-2} + \frac{2x+1}{(x-2)(x-1)} =$$

$$\frac{x(x-2) - (3x-1)(x-1) + 1(2x+1)}{(x-1)(x-2)} = \textbf{Pazi na minus!!!}$$

$$\frac{x^2 - 2x - (3x^2 - 3x - x + 1) + 2x + 1}{(x-1)(x-2)} =$$

$$\frac{x^2 - 2x - 3x^2 + 3x + x - 1 + 2x + 1}{(x-1)(x-2)} =$$

$$\frac{-2x^2 + 4x}{(x-1)(x-2)} =$$

$$\frac{-2x(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2x}{x-1}$$

Uslovi zadatka:

$$x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

$$5) \frac{1}{x^2+10x+25} + \frac{1}{x^2-10x+25} + \frac{2}{x^2-25} = ?$$

$$\frac{1}{x^2+10x+25} + \frac{1}{x^2-10x+25} + \frac{2}{x^2-25} =$$

$$\frac{1}{(x+5)^2} + \frac{1}{(x-5)^2} + \frac{2}{(x-5)(x+5)} =$$

$$\frac{1 \cdot (x-5)^2 + 1 \cdot (x+5)^2 + 2 \cdot (x^2-25)}{(x+5)^2(x-5)^2} =$$

$$\frac{x^2 - 10x + 25 + x^2 + 10x + 25 + 2(x^2 - 25)}{(x+5)^2(x-5)^2} =$$

$$\frac{2x^2 + 50 - 2x^2 - 50}{(x+5)^2(x-5)^2} =$$


$$= \frac{4x^2}{(x+5)^2(x-5)^2} = \frac{4x^2}{(x^2-25)^2}$$

Uslovi zadatka: $x+5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5$
 $x-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$

Množenje i deljenje racionalnih algebarskih izraza se radi kao i kod običnih razlomaka, s tim da prvo moramo "svaki" rastaviti na činioce. Dakle:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \quad ; \quad \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

1) $\frac{a^2 - a}{a^2 - 1} \cdot \frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 + a} = ?$ prvo "svaki" rastavimo na činioce !!!

$$\frac{a(a-1)}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{(a+1)^2}{a(a+1)} = \text{"Skratimo"}$$


$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

Uslov zadatka:

$$a^2 - 1 \neq 0 \quad ; \quad a^2 + a \neq 0$$

$$a \neq 1, a \neq -1, a \neq 0$$

2) $\frac{a^2 - ab}{a^2 - ab} \cdot \frac{a^2 b + ab^2}{ab} =$

$$\frac{a(a-b)}{a(a+b)} \cdot \frac{ab(a+b)}{ab} = \frac{a-b}{1} = a-b$$

Uslov zadatka:

$$a \neq 0, b \neq 0, a+b \neq 0$$

3) $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 3x} : \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 9} = ?$

$$\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-3)} : \frac{x(x+5)}{(x-3)(x+3)} =$$

$$\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-3)} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{x(x+5)} = \frac{(x-5) \cdot (x+3)}{x^2}$$

Uslovi:

$$x \neq 0, x-3 \neq 0, x+3 \neq 0$$

$$x \neq 3, x \neq -3$$

4) $\frac{a^2 + b^2}{1+2m+m^2} : \frac{a^4 - b^4}{1-2m^2+m^4} = ?$

$$\frac{a^2 + b^2}{1+2m+m^2} : \frac{a^4 - b^4}{1-2m^2+m^4} =$$

$$\frac{a^2 + b^2}{(1+m)^2} \cdot \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{(1-m^2)^2} =$$

$$\frac{a^2 + b^2}{(1+m)^2} \cdot \frac{(1-m)^2(1+m)^2}{(a-b)(a+b)(a^2 + b^2)} = \frac{(1-m)^2}{(a-b)(a+b)}$$

Uslov zadatka: $x \neq b, x \neq -b, m \neq 1, x \neq -1,$

5) $\frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 + c^2 - b^2 + 2ac} = ?$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 + c^2 - b^2 + 2ac} = \text{''pretumbajmo'' ih prvo}$$

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{a^2 + 2ac + c^2 - b^2} = \text{prva tri čine ''pun'' kvadrat}$$

$$\frac{(a^2 + b^2) - c^2}{(a+c)^2 - b^2} = \text{upotrebimo sad razliku kvadrata}$$

$$\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{(a+c-b)(a+c+b)} = \frac{a+b-c}{a+c-b}$$

Uslov: $a+c-b \neq 0$ i $a+c+b \neq 0$

6) **Skrati razlomak:** $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2 - 3x - 2x + 6}{x^2 - 2x - x + 2} =$$

$$= \frac{x(x-3) - 2(x-3)}{x(x-2) - 1(x-2)} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x-3}{x-1}$$

Uslov: $x-2 \neq 0$
 $x-1 \neq 0$

7) $\left(\frac{x}{y^2 + xy} - \frac{2}{x+y} + \frac{y}{x^2 + xy} \right) : \left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x} \right) = ?$

$$\left(\frac{x}{y(y+x)} - \frac{2}{x+y} + \frac{y}{x(x+y)} \right) : \left(\frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} \right) =$$

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy(x+y)} : \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} =$$

$$\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)} \cdot \frac{xy}{(x-y)^2} = \frac{1}{x+y}$$

Uslovi: $x \neq 0, y \neq 0, x+y \neq 0, x-y \neq 0$

$$8) \left(\frac{a}{6-3a} + \frac{a}{a+2} + \frac{4a}{a^2-4} \right) : \frac{a-4}{a-2} =$$

$$\left(\frac{a}{3(2-a)} + \frac{a}{a+2} + \frac{4a}{(a-2)(a+2)} \right) : \frac{a-4}{a-2} =$$

PAZI: Moramo $2-a$ **da okrenemo:** $2-a = -(a-2)$, **pa (-) izlazi ispred!!!**

$$\left(\frac{-a}{3(a-2)} + \frac{a}{a+2} + \frac{4a}{(a-2)(a+2)} \right) \cdot \frac{a-2}{a-4} =$$

$$\frac{-a(a+2) + 3a(a-2) + 12a}{3(a-2)(a+2)} \cdot \frac{a-2}{a-4} =$$

$$\frac{-a^2 - 2a + 3a^2 - 6a + 12a}{3(a+2)(a-4)} =$$

$$\frac{2a^2 + 4a}{3(a+2)(a-4)} = \frac{2a(a+2)}{3(a+2)(a-4)} = \frac{2a}{3(a-4)}$$

Uslovi: $a \neq 2$, $a \neq -2$, $a \neq 4$

9) **Uprosti izraz:** $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} =$

Ovaj zadatak ne možemo rešiti "klasično", probajmo da saberemo prva dva:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

Dodajemo mu treći sabirak:

$$\frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{2(1+x^2) + 2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{2+2x^2+2-2x^2}{1-x^4} = \frac{4}{1-x^4}$$

Ovo radi!!!

$$\frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{4+4x^2+4-4x^2}{(1-x^4)(1+x^2)} = \frac{8}{1-x^8}$$

Idemo dalje:

$$\frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{8+8x^8+8-8x^8}{(1-x^8)(1+x^8)} = \frac{16}{1-x^{16}}$$

Konačno:

$$\frac{16}{1-x^{16}} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{16+16x^{16}+16-16x^{16}}{(1-x^{16})(1+x^{16})} = \frac{32}{1-x^{32}}$$

Uslovi: $1-x \neq 0$ i $1+x \neq 0$

10) Pokazati da vrednost izraza ne zavisi od a,b,c i d

$$\frac{4}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} : \frac{1}{a + \frac{1}{b}} - \frac{4}{b(abc + a + c)}$$

$$\frac{4}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} : \frac{1}{a + \frac{1}{b}} - \frac{4}{b(abc + a + c)} =$$

$$\frac{4}{a + \frac{1}{\frac{bc+1}{c}}} : \frac{1}{\frac{ab+1}{b}} - \frac{4}{b(abc + a + c)} =$$

$$\frac{4}{a + \frac{c}{bc+1}} : \frac{b}{ab+1} - \frac{4}{b(abc + a + c)} =$$

$$\frac{4}{\frac{abc + a + c}{bc+1}} \cdot \frac{ab+1}{b} - \frac{4}{b(abc + a + c)} =$$

$$\frac{4(bc+1)}{abc + a + c} \cdot \frac{ab+1}{b} - \frac{4}{b(abc + a + c)} =$$

$$\frac{4(bc+1)(ab+1)}{b(abc + a + c)} - \frac{4}{b(abc + a + c)} = \text{Izvučemo gore 4 kao zajednički}$$

$$\frac{4[(bc+1)(ab+1)-1]}{b(abc + a + c)} =$$

$$\frac{4[ab^2c + bc + ab + 1 - 1]}{b(abc + a + c)} = \frac{4b(abc + c + a)}{b(abc + c + a)} = 4$$

Pazi: $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{AD}{BC}$

11) Ako je $a+b+c=0$ dokazati da je $a^3+b^3+c^3=3abc$

Dokaz: Podjimo od $a+b+c=0$

$$a+b=-c \text{ kubirajmo ovo}$$

$$(a+b)^3 = (-c)^3$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3$$

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = -c^3 \rightarrow a+b = -c \text{ ovo iz } a+b+c=0, \text{ zamenimo...}$$

$$a^3 + b^3 - 3abc = -c^3$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

12) Ako je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ Dokazati da je:

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = -3$$

Dokaz: Podjimo od:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c}$$

$$\frac{b+a}{ab} = -\frac{1}{c}$$

$$a+b = -\frac{ab}{c} \quad / \text{ Podelimo sa C da bi napravili izraz iz zadatka}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{c} = -\frac{ab}{c^2}}$$

Slično će biti:

$$\frac{b+c}{a} = -\frac{bc}{a^2}$$

$$\frac{c+a}{b} = -\frac{ca}{b^2}$$

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} =$$

$$-\frac{bc}{a^2} - \frac{ac}{b^2} - \frac{ab}{c^2} = \text{Priširimo ih redom sa } a, b \text{ i } c$$

$$-\frac{abc}{a^3} - \frac{abc}{b^3} - \frac{abc}{c^3} = \text{izvučemo } -abc$$

$$= -abc \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) \text{ Ajde ovo da nadjemo!!!}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c} / ()^3$$

$$\frac{1}{a^3} + 3 \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b} + 3 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^3} = -\frac{1}{c^3}$$

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{3}{ab} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = -\frac{1}{c^3}$$

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{3}{ab} \cdot \left(-\frac{1}{c} \right) = -\frac{1}{c^3}$$

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} - \frac{3}{abc} = -\frac{1}{c^3}$$

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = +\frac{3}{abc} \text{ Vratimo se u zadatak:}$$

$$= -abc \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right)$$

$$= -abc \cdot \frac{3}{abc} = -3$$

Malo je zeznuto, pa proučavajte pažljivo!