

LINEARNE JEDNAČINE

Pod linearnom jednačinom ‘po X’ podrazumevamo svaku jednačinu sa nepoznatom X koja se ekvivalentnim transformacijama svodi na jednačinu oblika:

$$a \cdot x = b$$

gde su a i b dati realni brojevi.

Rešenje ove jednačine je svaki realan broj x_0 za koji važi:

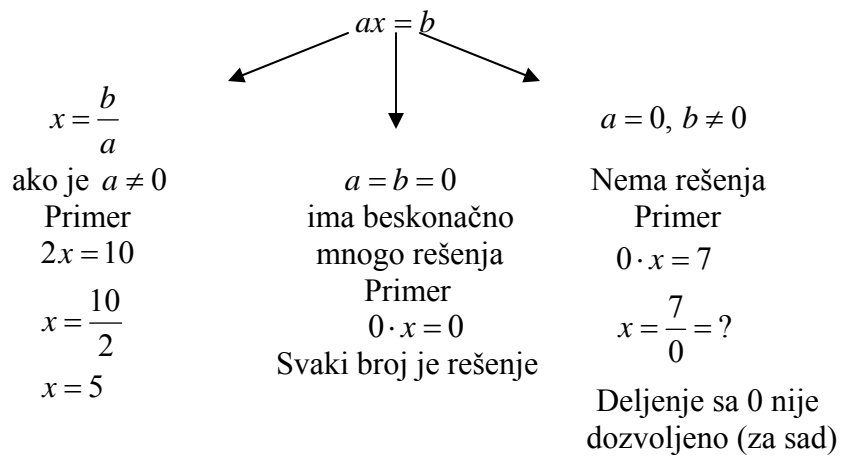
$$ax_0 = b$$

Ako nam posle rešavanja ostane jednačina većeg stepena (drugog, trećeg ...) onda nju probama da rastavimo na činioce I koristimo:

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$$

$$A \cdot B \cdot C = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0 \vee C = 0$$

Za svaku linearnu jednačinu važi:



Kako rešavati jednačinu?

- Prvo se oslobodimo razlomaka (ako ih ima) tako što celu jednačinu pomnožimo sa NZS
- Onda se oslobodimo zagrada (ako ih ima) množeći "svako sa svakim".
- Nepoznate prebacimo na jednu a poznate na drugu stranu znaka =.
(PAZI: prilikom prelaska sa jedne na drugu stranu menja se znak)
- "sredimo" obe strane (oduzmemo I saberemo) dobijemo $a \cdot x = b$
- Izrazimo nepoznatu $x = \frac{b}{a}$

VAŽNO: Ako negde vršimo skraćivanje moramo voditi računa da taj izraz koji kratimo mora biti različit od nule. U suprotnom se može desiti apsurdna situacija.

Primer: Rešiti jednačinu: $\frac{x^2}{x} = 0$

Ako skratimo $\frac{x \cdot x}{x} = 0 \Rightarrow x = 0$?

Ne smemo skratiti jer je uslov $x \neq 0$

ZADACI:

1)

$$9 - 2x = 5x + 2$$

$$-2x - 5x = +2 - 9$$

$$-7x = -7$$

$$x = \frac{-7}{-7}$$

$$x = 1$$

Nema razlomaka u zagrada tako da odmah "prebacujemo"
nepoznate na jednu a poznate na drugu stranu.

2) $3(2 - 3x) + 4(6x - 11) = 10 - x$ Oslobodimo se zagrada

$$6 - 9x + 24x - 44 = 10 - x$$

$$-9x + 24x + x = 10 - 6 + 44$$

$$16x = 48$$

$$x = \frac{48}{16}$$

$$x = 3$$

2) $\frac{y-5}{7} + 2 = \frac{2y-3}{2} - \frac{6y+5}{14}$ /·14 Nadjemo NZS za 7, 2 i 14; to je 14. Celu jednačinu

$2(y-5) + 28 = 7(2y-3) - 1(6y+5)$ pomnožimo sa 14.

$$2y - 10 + 28 = 14y - 21 - 6y - 5$$

$$2y - 14y + 6y = -21 - 5 + 10 - 28$$

$$-6y = -44$$

$$y = \frac{-44}{-6}$$

$$y = +\frac{22}{3}$$

$$4) (x+3)^2 - (x-4)^2 = 2x - 13$$

$$(x^2 + 6x - 9) - (x^2 - 8x + 16) = 2x - 13$$

$$x^2 + 6x + 9 - x^2 + 8x - 16 = 2x - 13$$

$$6x + 8x - 2x = -13 - 9 + 16$$

$$12x = -6$$

$$x = \frac{-6}{12}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$5) \frac{2}{x-2} = \frac{1}{x+3} \quad \text{PAZI: Ovde odmah postavi uslove: } x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

Množe se unakrsno

$$x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$$

$$2(x+3) = 1 \cdot (x-2)$$

$$2x+6 = x-2$$

$$2x-x = -2-6$$

$$x = -8$$

$$6) \frac{x+5}{3x-6} = \frac{1}{2} + \frac{2x-3}{2x-4} \quad \text{Uslovi: } x-2 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$\frac{x+5}{3(x-2)} = \frac{1}{2} + \frac{2x-3}{2(x-2)} \quad / \cdot 6(x-2)$$

$$2(x+5) = 3(x-2) + 3(2x-3)$$

$$2x+10 = 3x-6+6x-9$$

$$2x-3x-6x = -6-9-10$$

$$-7x = -25$$

$$x = \frac{25}{7}$$

$$7) \frac{2x-1}{2x+1} + \frac{8}{4x^2-1} = \frac{2x+1}{2x-1}$$

$$\frac{2x-1}{2x+1} + \frac{8}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{2x+1}{2x-1} \cdot (2x-1)(2x+1)$$

$$(2x-1)^2 + 8 = (2x+1)^2 \quad \text{Uslovi: } \begin{matrix} 2x+1 \neq 0 & 2x-1 \neq 0 \\ 2x \neq -1 & 2x \neq 1 \end{matrix}$$

$$4x^2 - 4x + 1 + 8 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$4x^2 - 4x - 4x^2 - 4x = 1 - 1 - 8$$

$$-8x = -8x$$

$$x = 1$$

$$8) |5x-1| + x = 2$$

Ovd morama najpre da definišemo apsolutnu vrednost: $|\otimes| = \begin{cases} \otimes, \otimes \geq 0 \\ -\otimes, \otimes < 0 \end{cases}$

$$\text{Dakle: } |5x-1| = \begin{cases} 5x-1, & x \geq \frac{1}{5} \\ -(5x-1), & x < \frac{1}{5} \end{cases}$$

Sad rešavamo dve jednačine:

$$\text{Uslov } x \geq \frac{1}{5}$$

$$5x-1+x=2$$

$$6x=2+1$$

$$6x=3$$

$$x = \frac{3}{6}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Uslov } x < \frac{1}{5}$$

$$-(5x-1)+x=2$$

$$-5x+1+x=2$$

$$-4x=2-1$$

$$-4x=1$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Ovo rešenje je "dobro" jer je $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{5}$

I ovo je "dobro" jer je $-\frac{1}{4} < \frac{1}{5}$

9) $|x-4| - |2x+3| = 2$

Najpre definišemo obe apsolutne vrednosti:

$$|x-4| = \begin{cases} x-4, & x-4 \geq 0 \\ -(x-4), & x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-4, & x \geq 4 \text{ I Uslov} \\ -(x-4), & x < 4 \text{ II Uslov} \end{cases}$$

$$|2x+3| = \begin{cases} 2x+3, & 2x+3 \geq 0 \\ -(2x+3), & 2x+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+3, & x \geq -\frac{3}{2} \text{ III Uslov} \\ -(2x+3), & x < -\frac{3}{2} \text{ IV Uslov} \end{cases}$$

Zadatak ćemo podeliti na 4 dela u zavisnosti od uslova:

I i II uslov:

i)

$$x \geq 4 \text{ i } x \geq -\frac{3}{2}$$

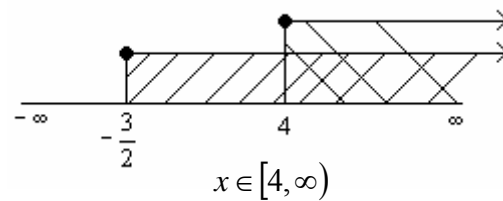
$$(x-4) - (2x+3) = 2$$

$$x-4-2x+3=2$$

$$-x = 2+4+3$$

$$-x = 9$$

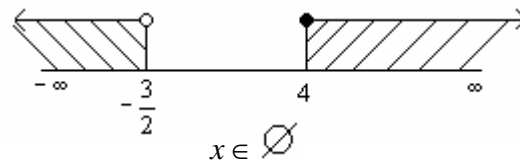
$$x = -9 \text{ Nije "dobro" rešenje jer ne zafovolyava } x \in [4, \infty)$$



ii) I i IV uslov

$$x \geq 4, x < -\frac{3}{2}$$

Ovde nema rešenja



iii) II i III uslov

$$x < 4 \text{ i } x \geq -\frac{3}{2}$$

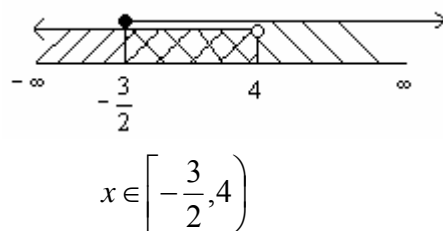
$$-(x-4) - (2x+3) = 2$$

$$-x+4-2x-3=2$$

$$-3x = 2+3-4$$

$$-3x = 1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$



Dobro je rešenje $-\frac{1}{3} \in \left[-\frac{3}{2}, 4\right)$

iv) II i IV uslov

$$x < 4, \text{ i } x < -\frac{3}{2}$$

$$-(x-4) + (2x+3) = 2$$

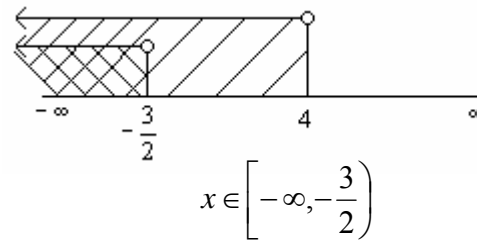
$$-x + 4 + 2x + 3 = 2$$

$$x = 2 - 4 - 3$$

$$x = -5$$

“Dobro” rešenje, jer $-5 \in \left[-\infty, -\frac{3}{2}\right)$

Zaključak: rešenja su $X_1 = -\frac{1}{3}$ i $X_2 = -5$



10) Rešiti i diskutovati jednačinu u zavisnosti od parametra

a) $mx - 3m = 1 + 5x$

sve ‘sa x’ prebacujemo na jednu stranu, sve što nema x na drugu

$$mx - 5x = 1 + 3m$$

Izdvojimo x kao zajednički

$$x(m - 5) = 1 + 3m$$

$$x = \frac{1 + 3m}{m - 5}$$

Diskusija:

$$\text{Za } m = 5 \Rightarrow x = \frac{1 + 3 \cdot 5}{0} \Rightarrow \text{nemoguća, nema rešenja}$$

$$\text{Za } m \neq 5 \Rightarrow x = \frac{1 + 3m}{m - 5} \Rightarrow \text{jednačina ima rešenja i to beskonačno mnogo jer } m \in \mathbb{R}$$

b) $2ax - a + 4 = 8a + 7 - 5x$

$$2ax + 5x = 8a + 7 + a - 4$$

$$x(2a + 5) = 9a + 3$$

$$x = \frac{9a + 3}{2a + 5}$$

Diskusija:

Za $2a + 5 = 0 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$ Jednačina nemoguća

Za $2a + 5 \neq 0 \Rightarrow$ jednačina ima ∞ mnogo rešenja

Jednačine imaju veliku primenu u rešavanju takozvanih ‘‘problemskih’’ zadataka. Važno je dobro proučiti tekst, ako treba skicirati problem i naći vezu između njih.

11) Otac ima 43 godine a sin 18, kroz koliko će godina otac biti dva puta stariji od sina?

Obeležimo sa X-broj godina koji treba da prođe.

Otac \rightarrow 43 godine

Sin \rightarrow 18 godina

Kako godine teku i za oca i za sina;

Otac \rightarrow 43+X

Sin \rightarrow 18+X

U zadatku se kaže da će otac biti dva puta stariji od sina:

$$2 \cdot (18 + x) = 43 + x$$

$$36 + 2x = 43 + x$$

$$2x - x = 43 - 36$$

$$x = 7$$

Proverimo: Kroz 7 godina otac će imati $43+7=50$ godina, a sin $18+7=25$ godina, pa je otac zaista dva puta stariji od sina.

12) Koji broj treba dodati brojiocu i imeniocu razlomka $\frac{2}{5}$ da bi smo dobili razlomak $\frac{5}{7}$?

$$\frac{2+x}{5+x} = \frac{5}{7} \text{ Množimo unakrsno}$$

$$7(2+x) = 5(5+x)$$

$$14+7x = 25+5x$$

$$7x-5x = 25-14$$

$$2x = 11$$

$$x = \frac{11}{2}$$

13) Učenik je prvog dana pročitao $\frac{1}{4}$ knjige, drugog dana $\frac{2}{3}$ od ostatka knjige, a trećeg dana poslednjih 40 stranica. Koliko ima stranica ta knjiga?

Obeležimo sa X-broj stranica knjige.

$$\frac{1}{4}x \rightarrow \text{I Dan} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}x \rightarrow \text{II Dan} \quad 40 \text{ str.} \rightarrow \text{III dan}$$

Ostalo je još, $\frac{2}{3}$ od $\frac{3}{4}$

$\frac{2}{3}$ da pročita

$$\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}x + 40 = x$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{2}{4}x + 40 = x$$

$$\frac{3}{4}x + 40 = x$$

$$x - \frac{3}{4}x = 40$$

$$\frac{1}{4}x = 40$$

$$x = 160$$

Knjiga ima 160 strana.

14) Jedan radnik može da završi posao za 9, a drugi za 12 dana. Ako se njima treći radnik, oni će taj posao završiti za 4 dana. Za koje bi vreme treći radnik sam završio posao?

Neka je x-vreme za koje treći radnik završi posao.

Kako razmišljamo?

Ako prvi radnik sam završi posao za 9 dana onda će za 1 dan odraditi $\frac{1}{9}$ posla.

Slično će drugi radnik za 1 dan odraditi $\frac{1}{12}$ posla, a treći $\frac{1}{x}$ deo posla.

Znači da oni zajedno za 1 dan odrade $\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{x}$ deo posla, Kako rade 4 dana, to je:

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{x}\right) \cdot 4 = 1$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{x} = 1/4 \cdot 36x$$

$$16x + 12x + 144 = 36x$$

$$28x - 36x = -144$$

$$-12x = -144$$

$$x = 12$$

Dakle, treći radnik bi sam završio posao za 12 dana.