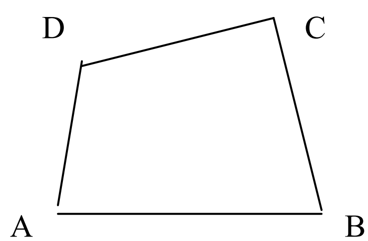
ČETVOROUGLOVI

ČETVOROUGLOVI

Mnogougao koji ima četiri stranice naziva se četvorougao.

Za svaki četvorougao važi da im je zbir unutrašnjih i spoljašnjih uglova isti i iznosi 360^0



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 360^0$$

Podela četvorouglova može se izvršiti na više načina.Prvu podelu izvršio je još Euklid.

On ih je podelio u pet grupa: kvadrati, pravougaonici,rombovi,romboidi i trapezi.

Međutim, danas je podela izvršena na sledeći način:

1) **Paralelogrami** (imaju po dva para paralelnih stranica)
2) **Trapezi** (imaju jedan par paralelnih stranica)
3) **Trapezoidi** (nemaju paralelne stranice)

Paralelogram je četvorougao čije su naspramne stranice paralelne.

Karakteristični paralelogrami su:

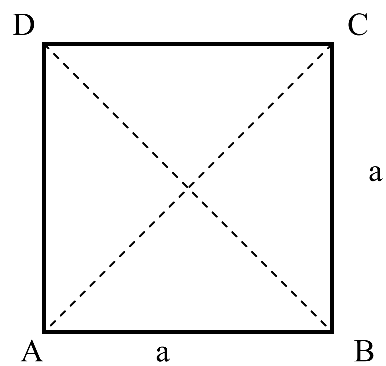
KVADRAT

- Sva četiri ugla su mu prava
- Sve stranice su jednake
- Dijagonale su jednake i međusobno se polove pod pravim uglom
- Centralno simetrična je figura
- Ima 4 ose simetrije

O= 4a R= $\frac{d}{2}$

$P = \frac{d^2}{2}$, P= a^2, r= $\frac{a}{2}$

d=a$\sqrt{2}$ $a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$



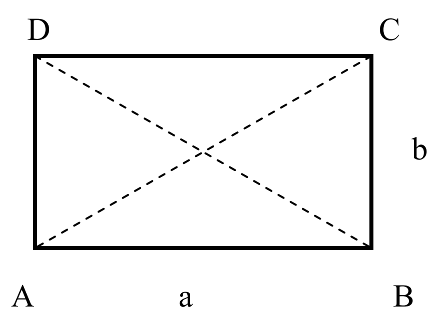
PRAVOUGAONIK

- Sva četiri ugla su mu prava
- Paralelne stranice su jednake
- Dijagonale su jednake i međusobno se polove
- Centralnosimetrična figura
- Ima 2 ose simetrije

O=2a+2b R=$\frac{d}{2}$

P=ab

$d^2=a^2+b^2$



ROMB

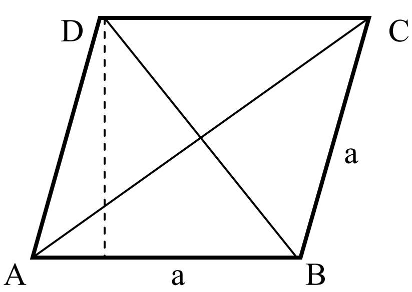
- Sve četiri stanice su jednake
- Naspramni uglovi su jednaki a uzastopni su suplementni
- Dijagonale se međusobno polove pod pravim uglom
- Centralnosimetrična figura
- Ima dve ose simetrije

O=4a

$r = \frac{h}{2}$

$P=\frac{d_1 d_2}{2} = ah$

$a^2=(\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2$

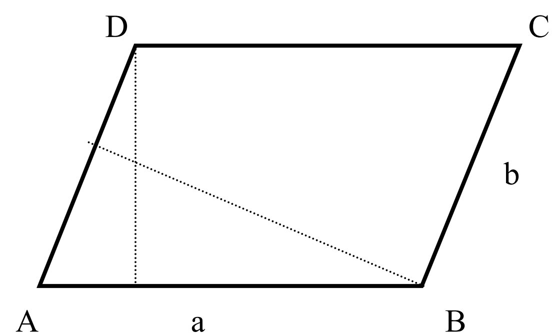


ROMBOID

- Paralelne stranice su jednake
- Naspramni uglovi su jednaki a uzastopni su suplementni
- Dijagonale se međusobno polove
- Centralnosimetrična figura

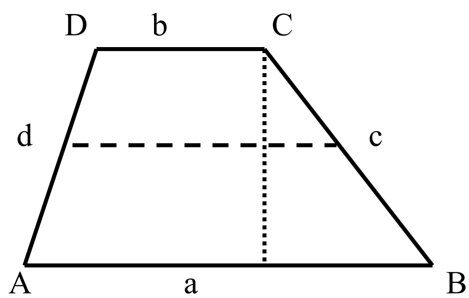
O=2a + 2b

$P= ah_a = bh_b$



Četvorougao čije su samo dve naspramne stranice paralelne zove se trapez.

Paralelne stranice se zovu osnovice, a druge dve kraci.

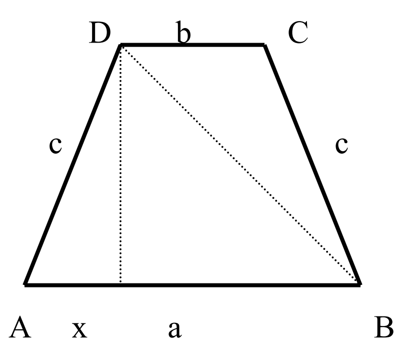


Stranice a i b su osnovice, c i d kraci. Duž koja spaja središta krakova je srednja linija trapeza $m=\frac{a+b}{2}$. Naravno m je paralelna i sa a i sa b.

$O=a+b+c+d$ $\quad P=\frac{a+b}{2}h$ ili $P=mh$

Karakteristični trapezi su:

JEDNAKOKRAKI TRAPEZ

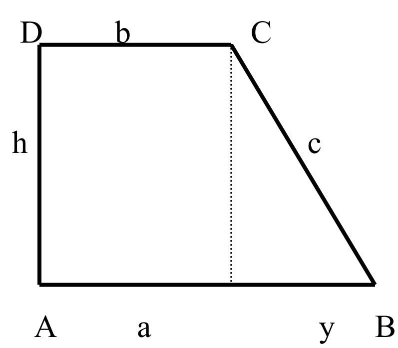


$x=\frac{a-b}{2}$ $\qquad m=\frac{a+b}{2}$

$O=a+b+2c$ $\quad P=mh$

$c^2=h^2+x^2$ $\quad d^2=h^2+(a-x)^2$

PRAVOUGLI TRAPEZ



$y=a-b$

$O=a+b+c+h$ $\quad P=mh$

$c^2=h^2+y^2$

Trapezoid je četvorougao koji nema ni jedan par paralelnih stranica.

Najpoznatiji trapezoid je **deltoid.**

DELTOID

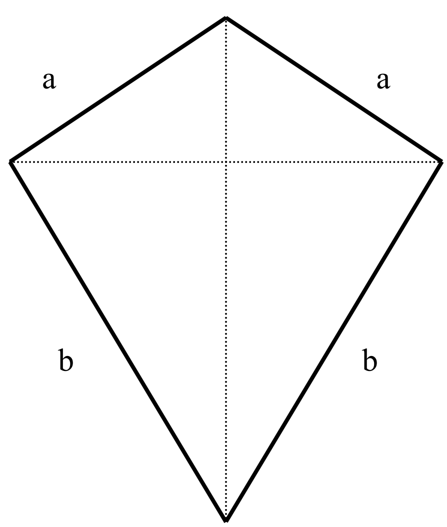
-Deltoid je trapezoid koji ima dva para jednakih uzastopnih stranica.

-Dijagonale deltoida su među sobom normalne.

-Simetrala deltoida je simetrala i njegovih uglova koje obrazuju jednake stranice

-Uglovi koje obrazuju nejednake stranice su među sobom jednaki.

-Dijagonale su istovremeno i simetrale uglova.



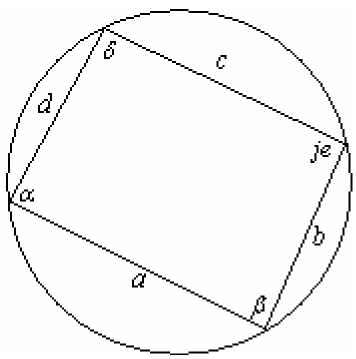
O= 2a +2b

$$P = \frac{d_1 d_2}{2}$$

Kvadrat i romb su takođe deltoidi.

Tetivni četvorougao

To je četvorougao oko koga može da se opiše kružnica.
Uslov je: $\alpha + je = \beta + \delta = 180^o$



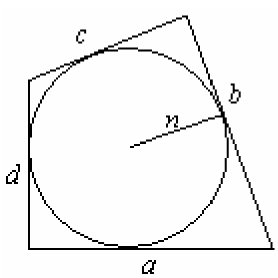
$$d_1 = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \rightarrow \text{Jedna dijagonala}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad}} \rightarrow \text{Druga dijagonala}$$

$$P = \frac{d_1 d_2}{2} \cdot \sin\varphi \rightarrow (\varphi \text{ je ugao izmedju dijagonala})$$

Tetivni četvorougao

To je četvorougao u koji može da se upiše kružnica.
Uslov je: $a + c = b + d$

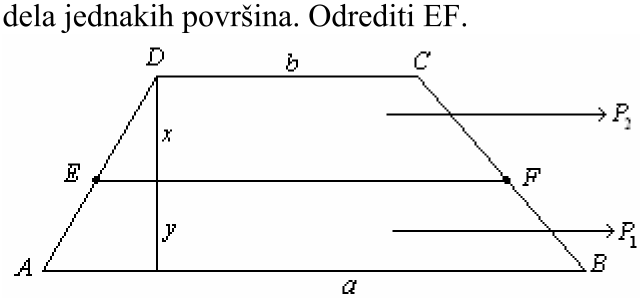


$P = (a+c)r$ ili
$P = (b+d)r$

$O = 2(a+c)$ ili
$O = 2(b+d)$

<u>ZADACI:</u>

1) Trapez osnovica a i b podeljen je odsečkom EF koji je paralelan osnovicama na dva dela jednakih površina. Odrediti EF.



$x + y = h$

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{a+EF}{2} \cdot = \frac{EF+b}{2} \cdot x$$

(površine su jednake)

$$y(a+EF)=x(EF+b)\Rightarrow x=\frac{y(a+EF)}{EF+b}$$

$P_1+P_2=P$ (zbir ove dve površine daje površinu celog trapeze)

$$\frac{a+EF}{2}\cdot y+\frac{EF+b}{2}\cdot x=\frac{a+b}{2}(x+y)$$

$$(a+EF)y+(EF+b)\frac{y(a+EF)}{EF+b}=a+b\left(y+\frac{(a+EF)}{EF+b}\right)$$

$$(a+EF)y+(EF+b)y=(a+b)\frac{y\left[(a+EF)+(b+EF)\right]}{EF+b}$$

$$2(a+EF)(EF+b)=(a+b)(a+b+2EF)$$

$$2(aEF+ab+EF^2+bEF)=(a+b)(a+b)+2EF(a+b)$$

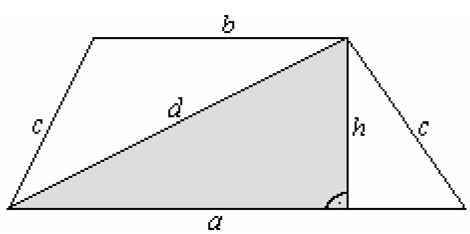
$$2EF(a+b+EF)-2EF(a+b)=(a+b)^2-2ab$$

$$2EF(a+b)+2EF^2-2EF(a+b)=a^2+2ab+b^2-2ab$$

$$2EF^2=a^2+b^2$$

$$EF=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\rightarrow \text{Re}\,\check{s}enje$$

2) U jednakom trapezu površine P=32 visina $h=4$, a razlika osnovica je 6. Odrediti dužinu dijagonale



$P=32$

$h=4$

$a-b=6$

$d=?$

$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h$$

$$32=\frac{a+b}{2}\cdot 4$$

Sa ova dva podatka pravimo sistem

$$\left.\begin{aligned}a+b&=16\\a-b&=6\end{aligned}\right\}\oplus$$

$2a=22$

$a=11\Rightarrow b=5$

Primenimo Pitagorinu teoremu:

$$d^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+h^2$$

$$d^2=\left(\frac{11+5}{2}\right)^2+4^2$$

$$d^2=64+16$$

$$d^2=80$$

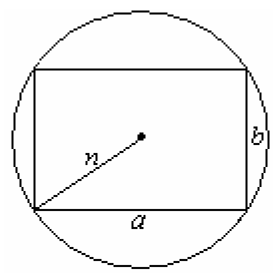
$$d=\sqrt{80}=\sqrt{16\cdot 5}$$

$$d=4\sqrt{5}$$

3) U krugu obima $O=10\pi$ upisan je pravougaonik čije se stranice odnose kao 3:4. Odrediti površinu pravougaonika

$$O=10\pi$$
$$a:b=3:4$$

$$P=?$$



$$r=\frac{d}{2}\Rightarrow d=2r$$

$$O=2r\pi$$

$$10\pi=2r\pi$$

$$r=5\Rightarrow d=10$$

Primenimo Pitagorinu teoremu:

$$a^2+b^2=d^2$$

$$(3k)^2+(4k)^2=10^2$$

$$9k^2+16k^2=100$$

$$25k^2=100$$

$$k^2=4$$

$$k=2$$

Pošto je $a:b=3:4$

Onda je: $\begin{cases} a=3k \\ b=4k \end{cases}$

$$a=3\cdot 2=6$$

$$b=4\cdot 2=8$$

$$P=a\cdot b$$

$$P=6\cdot 8$$

$$P=48$$

4) Stranica romba je $a=5$ a manja dijagonala $d_1=6$. Odrediti površinu upisanog kruga.

$a = 5$
$d_1 = 6$

$P_{kr} = ?$

Najpre ćemo naći drugu dijagonalu d_2.

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$$

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 5^2$$

$$\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 16$$

$$\frac{d_2}{2} = 4 \Rightarrow d_2 = 8$$

Kako imamo 2 obrasca za P romba, to ćemo iskoristiti da nadjemo visinu

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

$$P = ah \Rightarrow h = \frac{P}{a} = \frac{24}{5} = 4{,}8$$

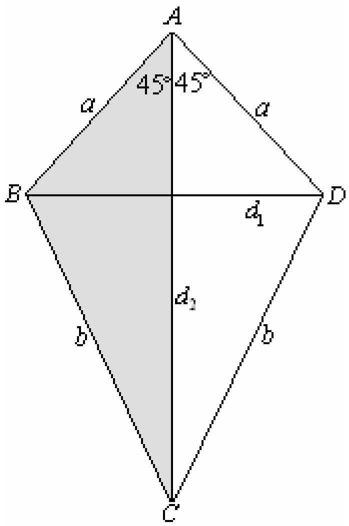
$$r = \frac{h}{2} \Rightarrow r = \frac{4{,}8}{2} = 2{,}4$$

$$P_{kr} = r^2\pi$$

$$P_{kr} = (2{,}4)^2\pi$$

$$P_{kr} = 5{,}76\pi$$

5) Kraće stranice deltoida obrazuju prav ugao. Ako je obim deltoida $O = 6 + 2\sqrt{17}$, a dužina dijagonala $d_2 = 4\sqrt{2}$, odrediti površinu.



$O = 6 + 2\sqrt{17}$

$d_2 = 4\sqrt{2}$

$P = ?$

$O = 2a + 2b$

$6 + 2\sqrt{17} = 2a + 2b$

$3 + \sqrt{17} = a + b \Rightarrow b = 3 + \sqrt{17} - a$

Primenimo kosinusnu teoremu na trouglom ABC pošto je $\angle \ BAC = 45^o$

$b^2 = a^2 + d_2^2 - 2ad_2 \cos 45^o$

$(3 + \sqrt{17} - a)^2 = a^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2a4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>PAZI:</u> $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$

$9 + 17 + a^2 + 6\sqrt{17} - 6a - 2\sqrt{17}a = a^2 + 32 - 8a$

Sredimo

$2a\left(1 - \sqrt{17}\right) = 6\left(1 - \sqrt{17}\right)$

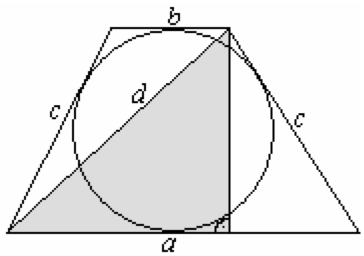
$2a = 6$

$a = 3 \Rightarrow b = \sqrt{17}$

$d_1 = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 12$

6) Oko kruga poluprečnika $r = \frac{3}{2}$ je opisan jednakostranični trapez površine $P = 15$.

Izračunati dužinu dijagonale trapeze.



Ovo je tangentni četvorougao!!!
$a+b=2c$ (ali nam sada neće trebati)

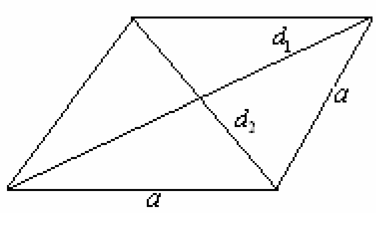
$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h$$
$$15=\frac{a+b}{2}\cdot 3$$
$$\frac{a+b}{2}=5$$
$$a+b=10$$

$$r=\frac{3}{2}, P=15$$

$$d=?$$

$$h=2r=2\cdot\frac{3}{2}=3$$
$$d^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+h^2$$
$$d^2=\left(\frac{10}{2}\right)^2+3^2$$
$$d^2=25+9$$
$$d^2=34$$
$$d=\sqrt{34}$$

7) Jedna dijagonala romba je za 20% kraća od druge. Ako je visina romba $h=\dfrac{40\sqrt{2}}{\sqrt{41}}$, odrediti površinu romba.



Zapišimo najpre podatke:

$d_2 = 80\% d_1$

$d_2 = \frac{80}{100} d_1$

$d_2 = \frac{4}{5} d_1$

$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$

$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{4}{5} d_1}{2}\right)^2 = a^2$

$\frac{d_1^2}{4} + \frac{4d_1^2}{25} = a^2$

$25d_1^2 + 16d_1^2 = 100a^2$

$41d_1^2 = 100a^2$

$a^2 = \frac{41d_1^2}{100}$

$a = \frac{\sqrt{41} d_1}{10}$

$P = a \cdot h = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

$\frac{\sqrt{41} \cdot d_1}{10} \cdot \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{41}} = \frac{d_1 \cdot \frac{4}{5} d_1}{2}$

$4\sqrt{2} = \frac{2}{5} d_1$

$d_1 = 10\sqrt{2} \Rightarrow d_2 = \frac{4}{5} 10\sqrt{2}$

$d_2 = 8\sqrt{2}$

$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2}}{2} = 80$